INSTYTUT MEDICUS
Kurs przygotowawczy na studia medyczne

Rok szkolny 2010/2011

tel. 0501 38 39 55
www.medicus.edu.pl

MATEMATYKA 4

FUNKCJA KWADRATOWA

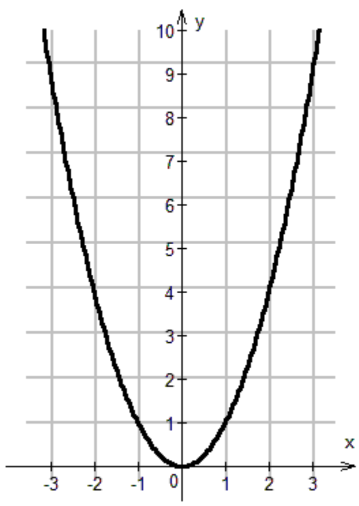
Funkcją kwadratową lub *trójmianem kwadratowym* nazywamy funkcję

$$f(x) = ax^2 + bx + c\,,$$

gdzie $a, b, c \in \mathbf{R}$ oraz $a \neq 0$. Dziedziną funkcji kwadratowej jest zbiór liczb rzeczywistych. Wykres funkcji kwadratowej nazywamy *parabolą*.

Z wykresu funkcji kwadratowej $y = x^2$ (gdzie $a = 1, b = c = 0$) możemy odczytać, że:

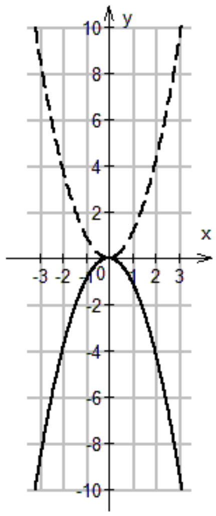
- punkt $(0,0)$ jest wierzchołkiem paraboli, której ramiona są skierowane do góry,
- oś $0Y$ jest osią symetrii paraboli,
- funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0\rangle$ oraz jest rosnąca w przedziale $\langle 0; +\infty)$,
- dla $x = 0$ funkcja przyjmuje wartość minimalną równą 0,
- dla każdego $x \neq 0$ zachodzi nierówność $f(x) > 0$.



Wykres funkcji $y = -x^2$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = x^2$ względem osi $0X$.

Z wykresu funkcji kwadratowej $y = -x^2$ (gdzie $a = -1, b = c = 0$) możemy odczytać, że:

- punkt $(0,0)$ jest wierzchołkiem paraboli, której ramiona są skierowane w dół,
- oś $0Y$ jest osią symetrii paraboli,
- funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0\rangle$ oraz jest malejąca w przedziale $\langle 0; +\infty)$,
- dla $x = 0$ funkcja przyjmuje wartość maksymalną równą 0,
- dla każdego $x \neq 0$ zachodzi nierówność $f(x) < 0$.



$y = f(x) = x^2$

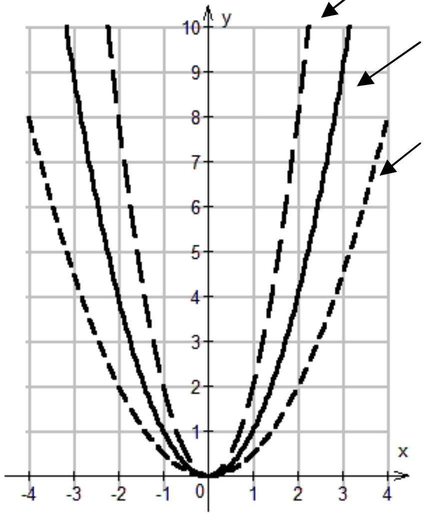
$y = -f(x) = -x^2$

Od wartości współczynnika a funkcji $y = ax^2$ zależy, czy ramiona paraboli skierowane są do góry (gdy $a > 0$), czy do dołu (gdy $a < 0$) oraz <u>jak bardzo są one rozchylone</u>.

$y = 2x^2$

$y = x^2$

$y = 0{,}5x^2$



Przesuwając wykres funkcji $y = ax^2$ (gdzie $a \neq 0$, aby była to funkcja kwadratowa) o p jednostek w poziomie i q jednostek w pionie, czyli o wektor $[p, q]$, otrzymujemy wykres funkcji

$$y = a(x - p)^2 + q\ .$$

Powyższe równanie nazywamy *postacią kanoniczną* funkcji kwadratowej.

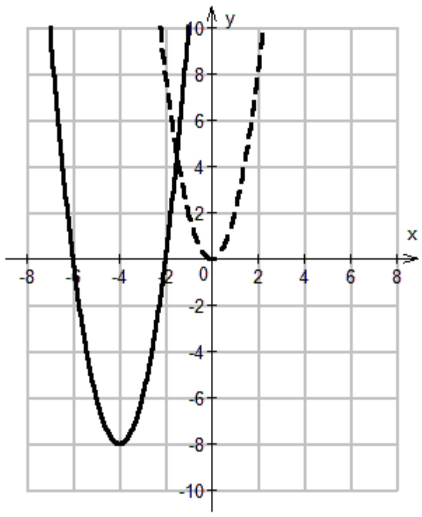
Postać kanoniczną funkcji kwadratowej można przekształcić do *postaci ogólnej* $y = ax^2 + bx + c$.

Przy przekształcaniu funkcji kwadratowej między postacią ogólną a postacią kanoniczną należy korzystać ze wzorów skróconego mnożenia (aby uniknąć kolizji oznaczeń, użyto zmiennych r i s)

$$(r - s)^2 = r^2 - 2rs + s^2 \quad \text{oraz} \quad (r + s)^2 = r^2 + 2rs + s^2\ .$$

Parabola ma wierzchołek w punkcie o współrzędnych: $x_w = p = \frac{-b}{2a}$ oraz $y_w = q = \frac{-\Delta}{4a}$, gdzie wyrażenie $\Delta = b^2 - 4ac$ nazywamy *wyróżnikiem* trójmianu kwadratowego.

Rysunek poniżej pokazuje wykres funkcji $y = 2x^2$ (linia przerywana) i wykres tej funkcji przesuniętej o wektor $[-4, -8]$ czyli parabolę opisaną równaniem $y = 2(x + 4)^2 - 8$ (linia ciągła).



Przekształcenie

$$y = 2(x + 4)^2 - 8 = 2(x^2 + 2x4 + 4^2) - 8 = 2x^2 + 16x + 24$$

prowadzi do funkcji zapisanej w postaci ogólnej, gdzie $a = 2,\ b = 16,\ c = 24$.

Wyróżnik trójmianu kwadratowego

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16^2 - 4 \cdot 2 \cdot 24 = 256 - 192 = 64\ .$$

Przesunięta funkcja ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = -6,\ x_2 = -2$.

Rozwiązaniem (*pierwiastkami*) równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ (gdzie $a \neq 0$) są miejsca zerowe funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$. Wyznaczamy je po zbadaniu wartości wyróżnika:

- jeżeli $\Delta < 0$, to brak jest pierwiastków równania,
- jeżeli $\Delta = 0$, to równanie ma jeden pierwiastek $x_0 = \frac{-b}{2a}$,
- jeżeli $\Delta > 0$, to równanie ma dwa pierwiastki: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Funkcję kwadratową można przedstawić w *postaci iloczynowej*

$$y = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right), \text{ gdzie } a \neq 0.$$

Wyrazy $\left(x - x_1\right)$ oraz $\left(x - x_2\right)$ nazywamy *czynnikami liniowymi*, a postać iloczynową nazywamy rozkładem na czynniki liniowe. Badamy wartość wyróżnika trójmianu kwadratowego:

- jeżeli $\Delta < 0$, to trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe,
- jeżeli $\Delta = 0$, to trójmian można przedstawić w postaci $y = a\left(x - x_0\right)^2$, gdzie $x_0 = \frac{-b}{2a}$,
- jeżeli $\Delta > 0$, to trójmian można przedstawić w postaci $y = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$,

  gdzie $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ są pierwiastkami trójmianu.

Wyróżnik funkcji $f(x) = 2x^2 + 16x + 24$ (wykres przedstawiony na stronie 3) wynosi $\Delta = 64$, rozwiązaniem równania kwadratowego $2x^2 + 16x + 24 = 0$ są liczby

$$x_1 = \frac{-16-\sqrt{64}}{2 \cdot 2} = -6,\ x_2 = \frac{-16+\sqrt{64}}{2 \cdot 2} = -2.$$

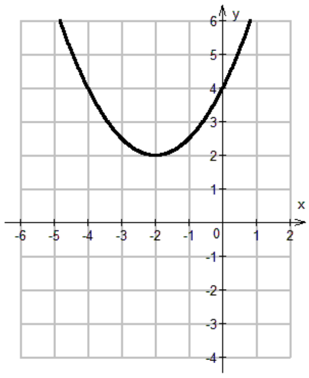
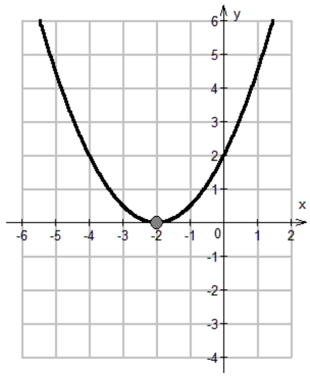
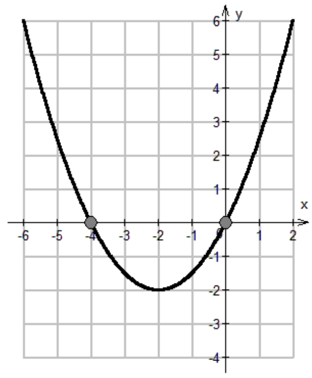
Przedstawmy tę funkcję w postaci iloczynowej:

$$y = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right) = 2\left(x + 6\right)\left(x + 2\right).$$

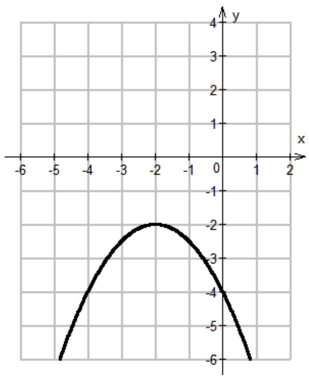
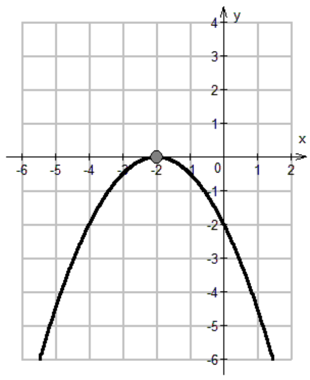
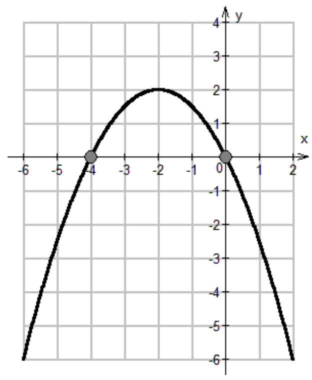
Aby przejść od postaci iloczynowej do postaci ogólnej funkcji kwadratowej, należy wykonać mnożenie $a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$ i uporządkować wyrazy w otrzymanym wyrażeniu.

Interpretacja geometryczna różnych położeń wykresu paraboli $y = ax^2 + bx + c$ względem osi OX:

$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

brak miejsc zerowych | jedno miejsce zerowe | dwa miejsca zerowe

Interpretacja geometryczna jest pomocna przy rozwiązywaniu układu równań, z których jedno opisuje funkcję liniową, a drugie funkcję kwadratową. Rozwiązanie takiego układu równań stanowią pary liczb (x, y) spełniające oba równania i opisujące punkty przecięcia wykresów obu funkcji.

<u>Przykład</u>

Szukamy rozwiązania układ równań $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x^2 + 3 \end{cases}$.

Łączymy oba równania $x + 1 = -x^2 + 3$.

Powstaje równanie kwadratowe $x^2 + x - 2 = 0$.

Obliczamy wyróżnik $\Delta = 1 - 4(-2) = 9$.

Wyróżnik $\Delta > 0$, więc równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki.

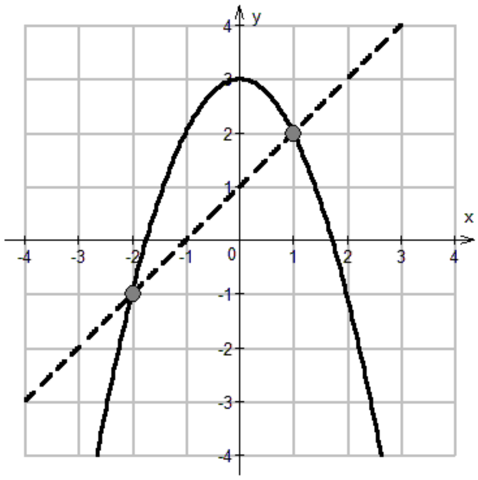
Obliczamy pierwiastki

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2} = \frac{-4}{2} = -2, \quad x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Podstawiamy obliczone pierwiastki do równania liniowego

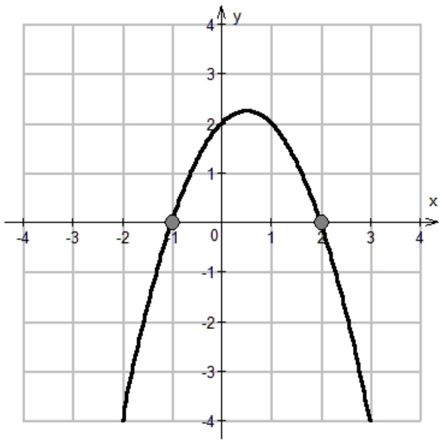
$$y_1 = x_1 + 1 = -1, \quad y_2 = x_2 + 1 = 2.$$

Wykreślimy parabolę i linię prostą. Wykresy tych funkcji przecinają się w punktach o współrzędnych $(x_1, y_1) = (-2, -1)$ i $(x_2, y_2) = (1, 2)$.



Interpretacja graficzna jest pomocna w rozwiązywaniu nierówności kwadratowych. Rozwiązanie nierówności z niewiadomą polega na wyznaczeniu tych wartości niewiadomej (zbioru rozwiązań), dla których nierówność jest spełniona. Wiedząc jak są skierowane ramiona paraboli wykresu funkcji kwadratowej (w górę albo w dół) i znając jej miejsca zerowe, można wyznaczyć zbiór rozwiązań odpowiedniej nierówności kwadratowej.

<u>Przykład</u>



Rozwiązujemy nierówność $\quad -x^2 + x + 2 \geq 0$.

Obliczamy wyróżnik $\quad \Delta = 1 - 4(-1)2 = 9$.

Wyróżnik $\Delta > 0$, więc równanie ma dwa pierwiastki

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{9}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2, \quad x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{-2} = \frac{2}{-2} = -1.$$

Czynnik $a < 0$, więc ramiona paraboli skierowane są w dół. Funkcja $y = -x^2 + x + 2$ jest nieujemna w przedziale $x \in \langle -1; 2 \rangle$ i taki też jest zbiór rozwiązań nierówności $-x^2 + x + 2 \geq 0$.

Przykład z fizyki

Na jaką wysokość wzniesie się kamyk rzucony pionowo w górę?

Prędkość początkowa kamyka v_0 = 10 m/s. Po jakim czasie kamyk spadnie na Ziemię?

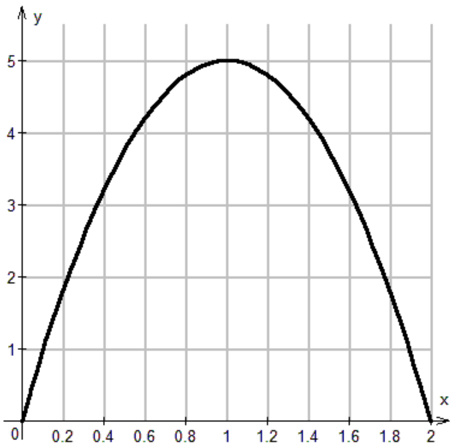
Wzór opisujący wysokość h w funkcji czasu t ma postać $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$,

gdzie $g = 10\frac{m}{s^2}$ oznacza przyspieszenie ziemskie.

Zapisujemy funkcję: $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2} = 10\left[\frac{m}{s}\right]\cdot t - \frac{1}{2}\cdot 10\left[\frac{m}{s^2}\right]\cdot t^2 = -5\left[\frac{m}{s^2}\right]\cdot t^2 + 10\left[\frac{m}{s}\right]\cdot t$

Pierwiastkami równania $y = -5x^2 + 10x$ są $x_1 = 0$ i $x_2 = 2$.

Wierzchołek paraboli znajduje się w punkcie (1, 5).



Kamyk wzniesie się na wysokość 5 m (najwyższy punkt paraboli, osiągany po 1 s lotu) i spadnie po 2 sekundach (parabola przecina prostą $y = 0$ w punkcie $x_2 = 2$).

W celu wyznaczenia najmniejszej lub największej wartości funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ w przedziale $\langle p_1; p_2 \rangle$ należy obliczyć wartości funkcji na brzegach przedziału: $f(p_1)$ i $f(p_2)$.

Jeżeli współrzędna wierzchołka paraboli $x_w = -\frac{b}{2a}$ zawiera się w zadanym przedziale, $x_w \in \langle p_1; p_2 \rangle$, to należy wyznaczyć również y_w (np. korzystając ze wzoru $y_w = \frac{-\Delta}{4a}$).

W przedziale $\langle p_1; p_2 \rangle$:

- najmniejsza spośród wyznaczonych wartości jest najmniejszą wartością funkcji kwadratowej;
- największa spośród wyznaczonych wartości jest największą wartością funkcji kwadratowej.

Przykład

Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ w przedziale $\langle -1; 2 \rangle$.

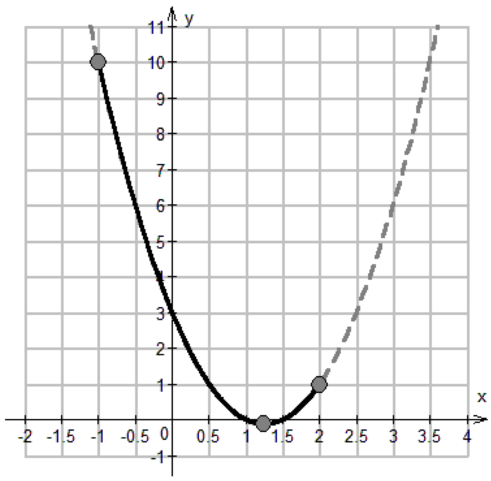
Obliczamy wartości funkcji na brzegach przedziału:

$f(-1) = 2(-1)^2 - 5(-1) + 3 = 2 + 5 + 3 = 10$ oraz $f(2) = 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 3 = 8 - 10 + 3 = 1$.

Obliczamy $x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{-5}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4} = 1{,}25$ i sprawdzamy, że $x_w \in \langle -1; 2 \rangle$,

dlatego obliczamy $y_w = f\left(\frac{5}{4}\right) = 2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{4} + 3 = -\frac{1}{8} = -0{,}125$.

Wyznaczone zostały wartości $\{-0{,}125; 1; 10\}$, z których najmniejszą jest $-0{,}125$, a największą jest 10. Możemy to zobrazować na wykresie funkcji.



Zakres rozszerzony.

Jeżeli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma dwa pierwiastki x_1, x_2, to można wyrazić ich sumę i iloczyn za pomocą *wzorów Viete'a* :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

INSTYTUT MEDICUS

Koniec darmowego fragmentu :-)

W dalszej części konspektu znajdują się:

- zadania spełniające aktualne wymagania maturalne
- klucze rozwiązań
- zakres materiału na następne zajęcia

Zapraszamy na kurs!

Szczegółowe informacje na temat naszego kursu przygotowawczego

znajdują się na stronie:

www.medicus.edu.pl

Zapisy są przyjmowane przez formularz zgłoszeniowy:

www.medicus.edu.pl/zapisy